

J. C. ROTTA

TURBULENTE  
STRÖMUNGEN



B. G. TEUBNER STUTTGART

D III - 36  
42/1798

INSTITUT  
FÜR METEOROLOGIE U. KLIMATOLOGIE  
DER TECHN. UNIVERSITÄT  
HANNOVER, HERRENHAUSER STR. 2

DK: 551. 511. 6

# Turbulente Strömungen

Eine Einführung in die Theorie  
und ihre Anwendung

Von Dr.-Ing. E. h. Julius C. ROTTA  
Wissenschaftlicher Mitarbeiter der  
Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt  
für Luft- und Raumfahrt E. V.,  
Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen

1972. Mit 104 Figuren



B. G. Teubner Stuttgart

# Inhalt

## 1. Allgemeine Grundlagen

1.1. Einleitung . . . . .	13
1.2. Mathematische Hilfsmittel zur Darstellung turbulenter Strömungen . . . . .	15
1.2.1. Erwartungswerte, Wahrscheinlichkeitsdichte . . . . .	15
1.2.2. Mittelwerte . . . . .	18
1.2.3. Weitere Einzelheiten über die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen . . . . .	21
1.2.4. Statistische Beschreibung von Geschwindigkeitsfeldern kontinuierlicher Medien . . . . .	24
1.2.5. Fourier-Analyse der Turbulenzfelder . . . . .	29
1.2.6. Konstruktion symmetrischer Tensorfelder . . . . .	36
1.3. Strömungsgleichungen . . . . .	42
1.3.1. Allgemeine Strömungsgleichungen für Gase . . . . .	42
1.3.2. Strömungsgleichungen für inkompressible Flüssigkeiten . . . . .	47
1.3.3. Randbedingungen und mathematische Formulierung des Turbulenzproblems . . . . .	49
1.3.4. Druckschwankungen und Wirbelgleichung . . . . .	52
1.3.5. Strömungsgleichungen in Mittelwerten; Reynoldssche Gleichungen . . . . .	55
1.3.6. Bewegungsgleichungen der statistischen Momente und der Spektralfunktionen . . . . .	57

## 2. Homogene Turbulenzfelder

2.1. Einführung . . . . .	63
2.1.1. Generelle Eigenschaften . . . . .	63
2.1.2. Wirbelgleichung . . . . .	66
2.1.3. Windkanalturbulenz . . . . .	67
2.2. Kinematik und Dynamik der homogenen Turbulenz . . . . .	67
2.2.1. Kinematische Beziehungen . . . . .	67
2.2.2. Korrelations- und Spektralfunktionen im gleichförmigen Flüssigkeitsstrom . . . . .	69
2.2.3. Dynamische Gleichungen . . . . .	72
2.3. Isotrope Turbulenzfelder . . . . .	74
2.3.1. Kinematik isotroper Turbulenz . . . . .	74
2.3.2. Dynamik der isotropen Turbulenzfelder . . . . .	83
2.3.3. Energietransport im Wellenzahlenraum . . . . .	85
2.4. Struktur und Energiedissipation isotroper Turbulenz . . . . .	90
2.4.1. Örtliche Struktur bei großen Reynolds-Zahlen . . . . .	90
2.4.2. Grobstruktur . . . . .	101
2.4.3. Endstadium . . . . .	104

2.4.4.	Ähnlichkeit der Struktur und das Abklinggesetz . . . . .	107
2.4.5.	Energiedissipation bei großen Reynolds-Zahlen . . . . .	112
2.4.6.	Lösungen der Spektralgleichung nach dem Ähnlichkeitsansatz . . . . .	116
2.5.	Achsensymmetrische Turbulenzfelder . . . . .	120
2.5.1.	Kinematik und Dynamik der achsensymmetrischen Turbulenz . . . . .	120
2.5.2.	Energieaustausch zwischen Geschwindigkeitskomponenten verschiedener Richtungen . . . . .	122

**3. Turbulente Scherströmungen**

3.1.	Grundzüge der Scherströmungen . . . . .	127
3.1.1.	Einleitung . . . . .	127
3.1.2.	Reynoldssche Gleichungen für turbulente Strömungsschichten . . . . .	128
3.1.3.	Gleichungen für die Reynolds-Spannungen und kinetische Schwankungsenergie . . . . .	132
3.1.4.	Über den Energiehaushalt . . . . .	135
3.1.5.	Scherströmungen großer Reynolds-Zahlen . . . . .	138
3.1.6.	Gleichgewichtsbedingungen einfacher Scherströmungen . . . . .	140
3.1.7.	Räumlich-zeitlicher Bewegungsablauf . . . . .	145
3.2.	Strömung nahe fester Wände . . . . .	150
3.2.1.	Ähnlichkeitsbetrachtungen . . . . .	151
3.2.2.	Experimentelle Befunde . . . . .	153
3.2.3.	Energiehaushalt . . . . .	156
3.2.4.	Bewegungen in der viskosen Unterschicht . . . . .	157
3.2.5.	Strömung an rauen Oberflächen . . . . .	158
3.3.	Freie Grenzen der Turbulenzfelder . . . . .	162
3.3.1.	Vorbemerkungen . . . . .	162
3.3.2.	Gemischt laminar-turbulente Strömungen . . . . .	163
3.3.3.	Statistische Beschreibung . . . . .	164
3.3.4.	Dynamik der Turbulenzausbreitung . . . . .	166
3.3.5.	Die Strömung außerhalb der Turbulenzgebiete . . . . .	170
3.4.	Halbempirische Berechnungsmethoden . . . . .	171
3.4.1.	Austauschansatz und Mischungswegformel . . . . .	171
3.4.2.	Berechnungsmethoden auf der Grundlage der Turbulenz-Energiegleichung . . . . .	175
3.4.3.	Bewegungsgleichung für ein Integral-Längenmaß . . . . .	178
3.4.4.	Weitere Entwicklungen . . . . .	184

**4. Erscheinungsformen turbulenter Scherströmungen**

4.1.	Einführung . . . . .	186
4.2.	Strömung durch Leitungen und Rohre gleichbleibender Querschnitte . . . . .	187
4.2.1.	Druckabfall und Schubspannungen . . . . .	188
4.2.2.	Ähnlichkeitsbetrachtungen . . . . .	189
4.2.3.	Widerstandsgesetz . . . . .	191
4.2.4.	Weitere Einzelheiten der Strömung . . . . .	192
4.2.5.	Anwendung halbempirischer Ansätze . . . . .	195
4.2.6.	Sekundärströmungen . . . . .	196
4.3.	Freie Turbulenz . . . . .	198

4.3.1. Ähnlichkeitsbetrachtungen . . . . .	200
4.3.2. Versuchsergebnisse . . . . .	207
4.3.3. Turbulenzstruktur. . . . .	213
4.3.4. Anwendung halbempirischer Ansätze . . . . .	217
4.3.5. Freie Strahlgrenzen . . . . .	219
4.4. Grenzschichten . . . . .	222
4.4.1. Grenzschichtgleichungen . . . . .	222
4.4.2. Grenzschicht an einer flachen Platte . . . . .	224
4.4.3. Reibungswiderstand der flachen Platte . . . . .	228
4.4.4. Gleichgewichtsgrenzschichten . . . . .	233
4.4.5. Turbulenzstruktur. . . . .	240
4.4.6. Berechnungsverfahren . . . . .	241
<b>5. Weitere Probleme</b>	
5.1. Wärmetransport und Vermischung . . . . .	252
5.2. Erzeugung und Ausbreitung von Schall . . . . .	254
5.3. Strömungen mit erheblichen Dichteänderungen . . . . .	255
5.4. Analytische Theorien der Turbulenz. . . . .	257
5.5. Statistische Strömungsmechanik . . . . .	259
<b>Weiterführende Bücher . . . . .</b>	<b>260</b>
<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>262</b>